第一種Fano多様体の双有理写像について

竹内, 聖彦

1987年度 pp.121-141

第一種 Fano 多様体の双有理写像について

名大・理　竹内 聖彦

§.0. 序

Iskovskih [1] は、主系列第一種3次元 Fano 多様体 V を分類する際、その上に直線 Z が存在すると仮定して、その直線からの二重射影 $\pi_{2Z}: V \cdots\rightarrow V'$ を詳しく調べるという方法をとった。後に Shokurov がこのような Fano 多様体上には必ず直線が存在することを示した。Iskovskih の調べた二重射影 $\pi_{2Z}: V \cdots\rightarrow V'$ は森理論を用いればより簡単に構成される。即ち、二重射影の像 V' は、V の Z に沿う blow-up W を何本かの (-2)-曲線で基本変換 (elementary transformation) して得られる3次元射影多様体 W' の端射線の縮約 $W' \rightarrow V'$ の像であり、これは端射線の分類により調べることができる:

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[r, leftrightarrow, "\text{基本変換}"] \arrow[dl, "\text{blow-up}"'] & W' \arrow[dr, "\text{縮約}"] & \\ V \arrow[rrr, dotted, "\pi_{2Z}"] & & & V' \end{tikzcd}$$

ここでは、森理論を用いて、指数１の第一種 Fano 多様体上の点からの三重射影、及び、有理２次曲線からの二重射影を調べ、いくつかの（双）有理写像を構成する。その結果、次を得る。

<u>定理</u>　$V = V_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ を、種数 g 指数１の第一種 Fano 多様体とする。このとき、

(1)　$g \leqq 12$。

(2)　$g \neq 11$。

(3)　$g \geqq 8$ ならば、V は直線を含む。

(4)　具体的には、例えば、次のような（双）有理写像を得る。

$g = 12$：

(A)　点 $P \in V_{22}$ からの三重射影 $f : V_{22} \cdots\to \mathbb{P}^3$。

f は双有理写像で、不確定点集合は点 P と P を通る６本の有理２次曲線であり、逆写像 f^{-1} の不確定点集合は $\mathbb{P}^3$ 内の有理６次曲線とその６本の四交弦 (quadrisecant) である。更にこの有理６次曲線は、$\mathbb{P}^3$ 内の非特異３次曲面上にあり、その曲面は f^{-1} により点 P に写される。

(B)　有理２次曲線 $C \subset V_{22}$ からの二重射影 $h : V_{22} \cdots\to Q_2$。

Q_2 は $\mathbb{P}^4$ 内の非特異２次超曲面である。h は双有理写像で、不確定点集合は有理２次曲線 C とこれと１点で交わ

る4本の直線であり、逆写像 h^{-1} の不確定点集合は Q_2 上の有理6次曲線とその4本の三交弦(trisecant)である。更にこの有理6次曲線は Q_2 内の或る4次 del Pezzo 曲面上にあり、その del Pezzo 曲面は h^{-1} により曲線 C に写される。
($g \leq 10$ の場合は本文末に述べる。)

以下で、この結果を導く概略を述べる。

§.1. 記号と準備

<u>1.0.</u> 標数0の代数的閉体上の代数多様体のみを扱う。射影空間 $\mathbb{P}^N$ の部分集合 Y に対して Y が張る $\mathbb{P}^N$ の部分射影空間を $\langle Y \rangle$ で表わす。スキーム Y の既約被約部分スキーム X に対して X の生成点での Y の重複度を $\mathrm{mult}_X Y$ で表わす。また V を3次元射影多様体、L を V 上の因子、X を V 内の点または曲線とするとき、正整数 n に対して、完全一次系 $|L|$ の部分一次系 $|L-nX|$ を

$$|L - nX| = \{ Y \in |L| \mid \mathrm{mult}_X Y \geq n \}$$

で定義する。

さて $V = V_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ を主系列第一種3次元 Fano 多様体とする。即ち、反標準因子 $-K_V$ が非常に豊富な3次元

非特異完備代数多様体で、その Picard 群 Pic V が整数加群 $\mathbb{Z}$ と同型であるものとする。このとき V は、反標準系 $|-K_V|$ により射影空間に埋込まれ、$\dim|-K_V| = g+1$、$\deg V = (-K_V)^3 = 2g-2$ である。この g を V の種数と呼ぶ。

命題 1.1. (Iskovskih [1])

(1) $g \geqq 5$ ならば、V は2次式のみで定義される。

(2) 直線 $Z \subset V$ に対し、その法線束 $\mathcal{N}_{Z/V}$ は $\mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}$ または $\mathcal{O}(-2)\oplus\mathcal{O}(1)$ であり、何れの場合も Z は V 内の或る曲面上を動く。

(3) 有理2次曲線 $C \subset V$ に対し、その法線束 $\mathcal{N}_{C/V}$ は a) $\mathcal{O}\oplus\mathcal{O}$、b) $\mathcal{O}(-1)\oplus\mathcal{O}(1)$、c) $\mathcal{O}(-2)\oplus\mathcal{O}(2)$、または、d) $\mathcal{O}(-4)\oplus\mathcal{O}(4)$ の何れかであり、a) の場合は C は V 全体を動き、他の場合は C は V 内の或る曲面上を動く。

注意 1.2. 上の命題の(3)で、$C \subset V$ の法線束 $\mathcal{N}_{C/V}$ が c) のとき C は V 内の2次曲面上を動き、d) のとき C は V 内の射影平面上を動く。V が指数1(即ち Pic $V = \mathbb{Z}(-K_V)$)で $g \geqq 4$ とすると V は2次曲面も射影平面も含まないので、このような V 内に含まれる有理2次曲線の法線束は a) または b) である。

1.3. 次に主系列3次元 Fano 多様体 $V = V_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ が2次式のみで定義されていると仮定する。このとき、次の(A)、(B)の何れかの状況と記号を固定する。

(A) P を V 内の直線上にない V 上の点とする(命題1.1(2)よりこのような点は必ず存在する)。$\sigma: W \to V$ を V の P での blow-up とし、$S = \sigma^{-1}(P)$ を例外因子とする。このとき S は $\mathbb{P}^2$ と同型で $-K_W \sim \sigma^*(-K_V) - 2S$、$(-K_W)^3 = 2g' - 2$ である(但し $g' = g - 4 \geqq 2$ とする)。

(B) C を V 内の有理2次曲線で、$N_{C/V} \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ または $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)$ となるものとする。$\sigma: W \to V$ を V の C に沿う blow-up とし、$S = \sigma^{-1}(C)$ とする。すると、S は有理線織面 F_0 または F_2 と同型で $-K_W \sim \sigma^*(-K_V) - S$、$(-K_W)^3 = 2g' - 2$ である(但し $g' = g - 3 \geqq 2$ とする)。

<u>定理1.4.</u> (Reid[3]) 1.3 の仮定の下で、

(1) 一次系 $|-K_W|$ は固定成分も底点も持たず generically finite morphism $\varphi_{-K_W}: W \to \varphi_{-K_W}(W) \subset \mathbb{P}^{g'+1}$ を定める。

(2) φ_{-K_W} を Stein 分解:

$$\begin{array}{ccc} & & W \\ & \swarrow^{\varphi} & \downarrow \varphi_{-K_W} \\ \overline{W} & \longrightarrow & \varphi_{-K_W}(W) \subset \mathbb{P}^{g'+1} \end{array}$$

したとき、φ は小双有理射（small birational morphism）であり、$\overline{W}$ は Gorenstein で、豊富な反標準因子 $-K_{\overline{W}}$ を持ち、$\varphi^*(-K_{\overline{W}}) = -K_W$ で $H^i(\mathcal{O}_{\overline{W}}) = 0$ $(i=1,2,3)$ である。

(3) 一次系 $|-K_V|$ が可約成員を持たないと仮定する。このとき W 内の曲線 X で S 上になく $X\cdot(-K_W) = 0$ となるものに対して、

(A) $g \geqq 8$ ならば $Y = \sigma(X)$ は P を通る有理2次曲線。

(B) $g \geqq 7$ ならば $Y = \sigma(X)$ は C と交わる直線。

$g \leqq 7$ のときは、これら以外に次のような型の有限本の曲線 X もある。

(A) $g \leqq 7$: $X \cong \mathbb{P}^1$ で $\deg Y = 4$、$\mathrm{mult}_p Y = 2$、
$\langle Y \rangle = \mathbb{P}^3$、$p_a(Y) = 1$。

$g = 6$: $X \cong \mathbb{P}^1$ で $\deg Y = 6$、$\mathrm{mult}_p Y = 3$、
$\langle Y \rangle = \mathbb{P}^4$、$p_a(Y) = 2$。

(B) $g \leqq 6$: Y は有理2次曲線で $\langle Y \cup C \rangle = \mathbb{P}^3$、
$p_a(Y \cup C) = 1$。

<u>注意 1.5.</u> $|-K_V|$ が可約成員を持たないとする（例えば V が指数1ならばよい）。このとき $g > 9$ ならば P を通る有理2次曲線は高々有限本であり、$g > 8$ ならば C と交わる直線は高々有限本である。

実際、もし P を通る有理2次曲線（C と交わる直線）の一次元族 $\mathcal{F}=\{\Gamma\}$ があれば、以下のように矛盾を生ずる。
$\Lambda = |-K_V-3P|$ （$\Lambda = |-K_V-2C|$）とすると

$$\dim \Lambda \geq \dim|-K_V|-10 = g-8 > 0$$

$$(\dim \Lambda \geq \dim|-K_V|-9 = g-7 > 0)$$

であるから、Λ は相異なる正因子を含む。一方、任意の $\Gamma \in \mathcal{F}$ に対し $\sigma^{-1}[\Gamma]\cdot(-K_W-S) = -1$ だから Γ は Λ の全ての成員に含まれる。従って、$\Gamma \in \mathcal{F}$ が掃出する曲面は Λ の固定成分であるが、$|-K_V|$ の成員が全て既約であるので、Λ は固定成分を持ち得ない。

§.2. 点または有理2次曲線からの射影の候補

<u>2.0.</u> 以下では $V = V_{2g-2} \subset \mathbb{P}^{g+1}$ は主系列第一種3次元Fano多様体で2次式で定義されているものとする。更に、指数1、即ち $\mathrm{Pic}\, V = \mathbb{Z}\cdot(-K_V)$ とする（従って、一次系 $|-K_V|$ は可約成員を持たない）。1.3 の状況と記号を踏襲する。専ら（A）の場合を述べ、（B）は対応する部分を括弧付きで書く。

定理1.4（3）は、V の点 P での（有理2次曲線 C に沿う）blow-up W 上の (-2)-曲線を限定している。但し、

(-2)-曲線 $X \subset W$ とは $X \cong \mathbb{P}^1$ で、$N_{X/W} \cong \mathcal{O}(a) \oplus \mathcal{O}(b)$ と書くとき $(a, b) = (-1, -1)$ または $(0, -2)$ となるものである。命題1.1、注意1.2、1.5により、特に $g > 9$ $(g > 8)$ ならば、W の (-2)-曲線は V 上の P を通る有限本の有理2次曲線（C と1点で交わる有限本の直線）の σ による強変換像のみである。(-2)-曲線の各々に沿って、基本変換（elementary transformation）ができるが、その基本変換を同時に行うことで、新しく射影多様体 W' を得る。W' は数値的有効な反標準因子 $-K_{W'}$ を持つ。別の表現をすれば、W に S-flop を施して W' を得るのである。

また W の Picard群が $-K_W$ と S とで生成されていることと、基本変換の性質（Reid[4]）から、W' の Picard群は $-K_{W'}$ と S'（S の強変換像）とで生成される。更に、交点数については、標準因子との交点数は不変であるが、S の自己交点数と S' の自己交点数との間に違いが生ずる。その違いを e とする。上に述べたことより、$g > 9$ $(g > 8)$ ならば e は P を通る有理2次曲線（C と1点で交わる直線）の本数に他ならない。

2.1. $-K_{W'}$ と S' の交点数を列挙すれば、

$$(-K_{W'})^3 = (-K_W)^3 = 2g' - 2$$

$$(-K_{W'})^2 S' = (-K_W)^2 S = 4$$

$$(-K_{W'}) S'^2 = (-K_W) S^2 = -2$$

$$S'^3 = S^3 - e = \begin{cases} 1 - e & ((A)\text{のとき}) \\ -e & ((B)\text{のとき}) \end{cases}$$

である。

<u>2.2.</u>　W の (-2)-曲線の強変換像(即ち W' 内の (-2)-曲線)と $-K_{W'}$ との交点数は 0 であるが、W' 内には、$-K_{W'}$ との交点数が正になる曲線もある。従って、W' の既約曲線のつくる閉錐は恰度 1 本の端射線 R を持つ。そして R の縮約射 $\alpha = cont_R : W' \to V'$ は数値的有効因子 L と正整数 n により、完全一次系 $|nL|$ で定められる:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{基本変換}"] \arrow[d, "\sigma"'] & & W' \arrow[d, "\alpha"] \\ V & & V' \end{tikzcd}$$

さて、α と V' を知るためには、因子 L を定めれば充分である。森理論により、端射線には3種の型がある: C-型(2次曲線束)、D-型(del Pezzo 曲面束)、E-型(例外因子を持つ)。これらの型を個別に扱う。

<u>2.3.</u>　C-型及び D-型について。

(1) C-型のとき $V' = \mathbb{P}^2$、D-型のとき $V' = \mathbb{P}^1$。

実際 $g(W') = g(V) = 0$ と α の全射性から $g(V') = 0$。従って D-型なら $V' = \mathbb{P}^1$。C-型のときは更に2次曲線束の一般論を使って $V' = \mathbb{P}^2$ がわかる。

(2) 互いに素な正整数 x、y があって $L = x(-K_{W'}) - yS'$。

x と y の正負は L を正数倍しても変わらないから、$L = \alpha^* \mathcal{O}_{V'}(1)$ としてよい。もし $x \leq 0$ ならば、一次系 $|L| = |x(-K_{W'}) - yS'| \subset |{|y|}S'|$ は次元を持たないので矛盾する。従って $x > 0$。次にもし $y \leq 0$ ならば、一次系 $|L| \supset |x(-K_{W'})| + |-yS'| \supset |x(-K_{W'})|$ が定める射の像が3次元となって矛盾。従って $y > 0$。最後に L を $\mathrm{Pic}\, W'$ の生成元にとれば x と y は互いに素。

(3) C-型のとき $y = 1$ または 2、

D-型のとき $y = 1$、2 あるいは 3。

$L = \alpha^* \mathcal{O}_{V'}(1)$ について示せばよい。W'_v を α の一般ファイバーとすると、C-型のとき W'_v は有理2次曲線で、D-型のとき W'_v は del Pezzo 曲面である。$\mathrm{Pic}\, W'$ をファイバーに制限すると $\mathrm{Pic}\, W'/\mathbb{Z}\cdot L \subset \mathrm{Pic}\, W'_v$ で $-K_{W'}|_{W'_v} = -K_{W'_v}$ である。従って

$$\mathbb{Z}/y\mathbb{Z} \cong \mathrm{Pic}\, W'/(\mathbb{Z}\cdot L + \mathbb{Z}\cdot(-K_{W'})) \subset \mathrm{Pic}\, W'_v / \mathbb{Z}\cdot(-K_{W'_v})$$

より、$-K_{W'_v}$ は y で割り切れる。故に W'_v が有理2次曲線

のとき $y=1$ または 2、W'_v が del Pezzo 曲面のとき $y=1$、2 あるいは 3 である。

(4) L と $-K_{W'}$ 及び S' との交点数に関して、次を得る。

C-型：
$$L^3 = 0$$
$$L^2(-K_{W'}) = 2$$
$$L(-K_{W'})^2 = 12 - \deg\Delta$$
（但し Δ は 2 次曲線束 $\alpha : W' \to \mathbb{P}^2$ の discriminant locus）。

D-型：
$$L^2(-K_{W'}) = 0$$
$$L^2 S' = 0$$
$$L(-K_{W'})^2 = (-K_{W'_v}{}^2)_{W'_v} = \deg W'_v \text{。}$$

<u>2.4.</u> E-型について。この場合 W' 上に例外因子 D がある。

(1) $\mathrm{Pic}\, W' = \mathbb{Z}\cdot(-K_{W'}) \oplus \mathbb{Z}\cdot S' = \mathbb{Z}\cdot L \oplus \mathbb{Z}\cdot D$

ここで $L = \alpha^* \mathcal{O}_{V'}(1)$ である。

(2) 互いに素な正整数 z, u があって $D = z(-K_{W'}) - uS'$。

証明は 2.3 (2) と同様である。

(3) E_1-型（非特異曲線への blow-down）、E_2-型（非特異点への blow-down）については $\mathrm{Pic}\, V' \cong \mathbb{Z}$ で $-K_{V'}$ が正だから V' は第一種 3 次元 Fano 多様体になる。更に、

$$\mathrm{Pic}\, W' = \alpha^*(\mathrm{Pic}\, V') \oplus \mathbb{Z}\cdot D$$
$$\mathbb{Z}/u\mathbb{Z} \cong \mathrm{Pic}\, W'/(\mathbb{Z}\cdot D + \mathbb{Z}\cdot(-K_{W'})) \cong \mathrm{Pic}\, V'/\mathbb{Z}\cdot(-K_{V'})$$

であるから u は V' の指数に等しい。従って $u=1, 2, 3$ あるいは 4。

(4) 交点数の関係を考えると、

E_1-型：
$$(-K_{W'}+D)^3 = (-K_{V'})^3$$
$$(-K_{W'}+D)^2 D = \alpha^*(-K_{V'})^2 D = 0$$
$$(-K_{W'}+D) D^2 = \alpha^*(-K_{V'}) D^2 = -(-K_{V'}\cdot\Gamma)$$
$$= -u\cdot \deg \Gamma$$
$$(-K_{W'}) D^2 = (-K_{W'}+D) D^2 - D^3$$
$$= -(-K_{V'}\cdot\Gamma) + c_1(N_{\Gamma/V'})$$
$$= 2g(\Gamma)-2$$

（但し $\Gamma=\alpha(D)$ は blow-up α の中心の曲線である）。

E_2 — E_5-型：

		E_2-型	E_3、E_4-型	E_5-型
D^3	$=$	1	2	4
$D^2(-K_{W'})$	$=$	-2	-2	-2
$D(-K_{W'})^2$	$=$	4	2	1

<u>2.5.</u> さて 2.3(2) 或いは 2.4(2) を用いて 2.3(4) 或いは 2.4(4) の各々の式の L、D を消去し、2.1 の値を代入すると、未知正整数 x、y、z、u、g、e に関する不定方程式系が得られる。例えば D-型で (A) の場合は、

$$\begin{cases} (2g-10)x^2 - 8xy - 2y^2 = 0 \\ 4x^2 + 4xy + (1-e)y^2 = 0 \\ (2g-10)x - 4y = \deg W_v' \end{cases}$$

である。これから、条件2.3(2)、(3)或いは2.4(2)、(3)を満足するような解を求める。上の例では

$$(x,\ y,\ g,\ e,\ \deg W_v') = (1,\ 1,\ 10,\ 9,\ 6) \quad \text{または} \quad (1,\ 2,\ 17,\ 4,\ 16)$$

である。このようにして得られた解から $\deg\Delta$、$\deg W_v'$、$\deg\Gamma$, $g(\Gamma)$ 等の幾何学的意味を考慮すれば、次の一覧表ができる（上の場合 $\deg W_v' \leq 9$ より後者は不適当）。表中#印が実際に構成される(双)有理写像である（次節参照）。また $g>13$ となる解はないことにも注意しておく。

2.6. (A)の場合、即ち $\sigma: W \to V$ が点の blow-up の場合。

g	e	Δ	D	型	V'	その他の情報
13	5	$-K_{W'}-S'$	$2(-K_{W'})-3S'$	E_1	Q_2	$\deg\Gamma=6$、$g(\Gamma)=0$
#12	6	$-K_{W'}-S'$	$3(-K_{W'})-4S'$	E_1	$\mathbb{P}^3$	$\deg\Gamma=6$、$g(\Gamma)=0$
11	7	$-K_{W'}-S'$		C	$\mathbb{P}^2$	$\deg\Delta=4$
#10	9	$-K_{W'}-S'$		D	$\mathbb{P}^1$	$\deg W_v'=6$
	3	$2(-K_{W'})-S'$	$-K_{W'}-S'$	E_1	V_{22}	$\deg\Gamma=6$、$g(\Gamma)=1$
#9	12	$3(-K_{W'})-2S'$	$-K_{W'}-S'$	E_2	V_{16}	

9	11	$2(-K_{W'})-S'$	$-K_{W'}-S'$	E_1	V_{14}	$\deg\Gamma=2$、$g(\Gamma)=0$
8	15	$2(-K_{W'})-S'$	$5(-K_{W'})-3S'$	E_1	Q_2	$\deg\Gamma=10$、$g(\Gamma)=7$
#	16	$2(-K_{W'})-S'$	$3(-K_{W'})-2S'$	E_1	B_3	$\deg\Gamma=4$、$g(\Gamma)=0$
7	30	$5(-K_{W'})-2S'$	$2(-K_{W'})-S'$	E_2	V_{12}	
#	24	$3(-K_{W'})-S'$	$5(-K_{W'})-2S'$	E_1	B_5	$\deg\Gamma=12$、$g(\Gamma)=7$
	29	$3(-K_{W'})-S'$	$2(-K_{W'})-S'$	E_1	V_{10}	$\deg\Gamma=2$、$g(\Gamma)=0$
#6	90	$9(-K_{W'})-2S'$	$4(-K_{W'})-S'$	E_2	V_{10}	
	85	$5(-K_{W'})-S'$	$9(-K_{W'})-2S'$	E_1	B_4	$\deg\Gamma=10$、$g(\Gamma)=6$
	89	$5(-K_{W'})-S'$	$4(-K_{W'})-S'$	E_1	V_8	$\deg\Gamma=2$、$g(\Gamma)=0$
	59	$6(-K_{W'})-S'$	$5(-K_{W'})-S'$	E_1	V_{22}	$\deg\Gamma=14$、$g(\Gamma)=5$

2.7. (B)の場合、即ち $\sigma: W \to V$ が有理2次曲線からの blow-up の場合。

g	e	L	D	型	V'	その他の情報
#12	4	$-K_{W'}-S'$	$2(-K_{W'})-3S'$	E_1	Q_2	$\deg\Gamma=6$、$g(\Gamma)=0$
11	7	$-K_{W'}-S'$	$3(-K_{W'})-4S'$	E_1	$\mathbb{P}^3$	$\deg\Gamma=6$、$g(\Gamma)=0$
#10	6	$-K_{W'}-S'$		C	$\mathbb{P}^2$	$\deg\Delta=4$
#9	8	$-K_{W'}-S'$		D	$\mathbb{P}^1$	$\deg W_v'=6$
	2	$2(-K_{W'})-S'$	$-K_{W'}-S'$	E_1	V_{22}	$\deg\Gamma=6$、$g(\Gamma)=1$
8	11	$3(-K_{W'})-2S'$	$-K_{W'}-S'$	E_2	V_{16}	
#	10	$2(-K_{W'})-S'$	$-K_{W'}-S'$	E_1	V_{14}	$\deg\Gamma=2$、$g(\Gamma)=0$

#7	14	$2(-K_{W'})-S'$	$5(-K_{W'})-3S'$	E_1	Q_2	$\deg\Gamma=10$、$g(\Gamma)=7$
	15	$2(-K_{W'})-S'$	$3(-K_{W'})-2S'$	E_1	B_3	$\deg\Gamma=4$、$g(\Gamma)=0$
6	29	$5(-K_{W'})-2S'$	$2(-K_{W'})-S'$	E_2	V_{12}	
	23	$3(-K_{W'})-S'$	$5(-K_{W'})-2S'$	E_1	B_5	$\deg\Gamma=12$、$g(\Gamma)=7$
#	28	$3(-K_{W'})-S'$	$2(-K_{W'})-S'$	E_1	V_{10}	$\deg\Gamma=2$、$g(\Gamma)=0$
5	89	$9(-K_{W'})-2S'$	$4(-K_{W'})-S'$	E_2	V_{10}	
	84	$5(-K_{W'})-S'$	$9(-K_{W'})-2S'$	E_1	B_4	$\deg\Gamma=10$、$g(\Gamma)=6$
#	88	$5(-K_{W'})-S'$	$4(-K_{W'})-S'$	E_1	V_8	$\deg\Gamma=2$、$g(\Gamma)=0$
	58	$6(-K_{W'})-S'$	$5(-K_{W'})-S'$	E_1	V_{22}	$\deg\Gamma=14$、$g(\Gamma)=5$

上の２つの表 2.6、2.7 において、Q_2 は $\mathbb{P}^4$ 内の非特異２次超曲面、B_d（$d=3$、4 または 5）は $\mathbb{P}^{d+1}$ 内の指数２の３次元 Fano 多様体を表わす。

§.3. 候補の吟味

3.0. 前節の最後に挙げた２つの表の（双）有理写像が実際に幾何学的に実現されるかどうかを調べる。表 2.6 の $g=13$ の場合が実現されないこと（3.1 参照）を示せば、序で述べた定理の主張 (1) が従う。$g=12$ の場合、表 2.6、2.7 の情報を幾何学的に読みなおすと定理の (4) で述べたことになる。

また $g=13$ のときと同様の方法で、表 2.7 の $g=11$ の場合が実現されないことがわかり、定理の主張(2)を得る。

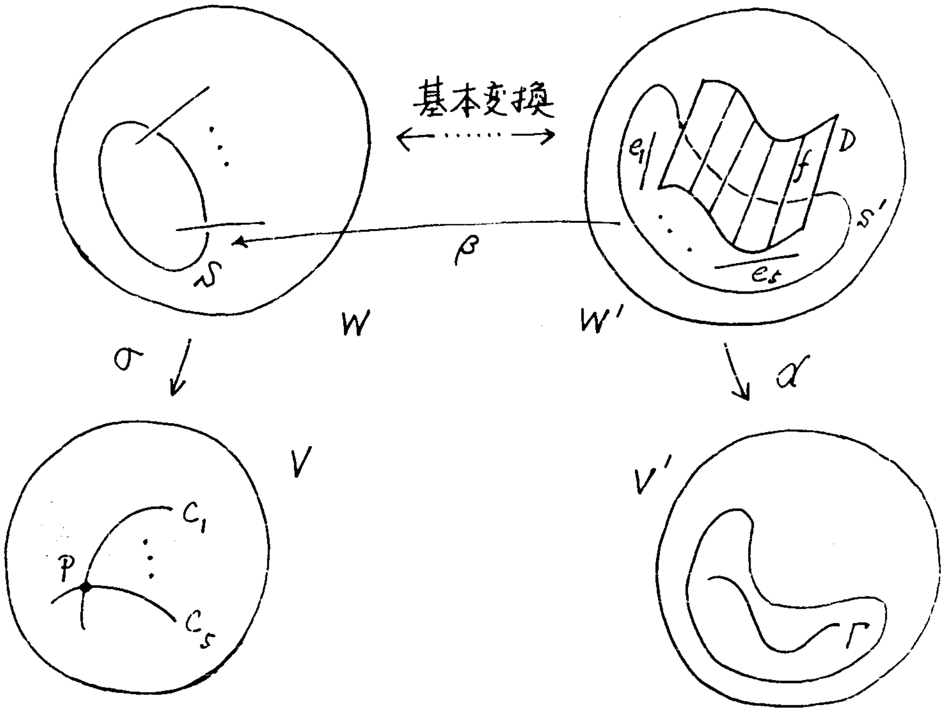
直線の存在(即ち、序の定理の主張(3))は次のようにして得られる。まず、2.0 で述べたように、定理 1.4 (3) により、(A) で $g \geq 8$ のとき基本変換するのは P を通る有理 2 次曲線の強変換像だけであり、その本数を e が表わしていることに注意すれば、$g \geq 8$ ならば必ず、有理 2 次曲線を含むことがわかる。次に注意 1.2 より、それらの有理 2 次曲線 C の法線束 $N_{C/V}$ は $\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C$ または $\mathcal{O}_C(-1) \oplus \mathcal{O}_C(1)$ なので、1.3 (B) の条件を満たしている。従って、表 2.7 の各々の(双)有理写像(#)が得られ、再び定理 1.4 (3) と e の意味から、直線の存在が従う。

3.1. $V = V_{24} \subset \mathbb{P}^{14}$ ($g=13$) が存在しないこと。

表 2.6 と 2.0 で述べたことから、V の点 P を通る 5 本の有理 2 次曲線 C_1、…、C_5 があり、V の P での blow-up W をこれらの有理 2 次曲線の強変換像に沿って基本変換して W' を得、W' の端射線の縮約が V' である。

さて、点 P を充分一般にとれば、5 本の有理 2 次曲線は P で互いに横断的に交わっており、それらの法線束はみな $\mathcal{O}_C \oplus \mathcal{O}_C$ の形であると仮定してよい。$S = \sigma^{-1}(P) \subset W$ の

W' での像を S' とすると、$\beta: S' \to S \cong \mathbb{P}^2$ は $\mathbb{P}^2$ の 5 点 blow-up に他ならない。その例外曲線 e_1、…、e_5 が恰度 W' の (−2)-曲線である。



W' の例外因子 $D\,(\sim 2(-K_{W'}) - 3S')$ は線織面であるが、その一般ファイバーを f とすると、

$$f \cdot D = -1$$

$$f \cdot (-K_{W'} - S') = f \cdot \alpha^* \mathcal{O}_{V'}(1) = 0$$

より $f \cdot S' = 1$ である。従って $d' = D \cap S'$ は D の切断と有限本のファイバーである。簡単のため $d' \subset S'$ が切断（即ち既約曲線）とし、$d = \beta(d') \subset S = \mathbb{P}^2$ とおく。ℓ を $S = \mathbb{P}^2$ 上の直線とし、$\ell' = \beta^* \ell$ とする。交点数を計

算すると、

$$(d\cdot l)_S = (d'\cdot l')_{S'} = D\cdot l'$$
$$= 2(-K_{W'})\cdot l' - 3S'\cdot l' = 4+3=7$$
$$(d'\cdot e_i)_{S'} = D\cdot e_i = 2(-K_{W'})\cdot e_i - 3S'\cdot e_i = 3$$
（但し　$i=1$、…、5）

である。従って、　$d\subset S=\mathbb{P}^2$ は5つの3重点を持つ平面7次曲線である。

ところで、平面上に任意に5点をとるとき、その5点を通る2次曲線が必ず存在するので、曲線 d の5つの3重点を通る2次曲線 C を考える。交点数は $C\cdot d=14$ であるが、5つの3重点を通っているのだから、2次曲線 C は7次曲線 d に含まれなければならない。従って d は可約曲線となる。ところが d' は既約であったから、これは矛盾である。

d' が一般の場合も、切断について考えれば、同じように矛盾が生じる。従って $g=13$ となるものは存在しないことがわかった。

$g=12$ および 11 の場合については、既に述べた(3.0)ので、以下では $g\leqq 10$ の各々の場合について、矛盾が生じて実現できないものを除き、候補をひとつにしぼる過程を述べる。

3.2. $g=10$ の場合。

(A) 一次系 $|-K_{W'}-S'|$ の次元を考える。基本変換の性質より、$\dim H^0(\mathcal{O}_{W'}(-K_{W'}-S'))=\dim H^0(\mathcal{O}_W(-K_W-S))$ であり、$-K_W=\sigma^*(-K_V)-2S$ を使えば、

$$\begin{aligned}\dim H^0(\mathcal{O}_{W'}(-K_{W'}-S')) &= \dim H^0(\mathcal{O}_W(\sigma^*(-K_V)-3S))\\ &\geq \dim H^0(\mathcal{O}_V(-K_V))-10\\ &= 2\end{aligned}$$

である。従って $\dim|-K_{W'}-S'|\geq 1$ となり、$-K_{W'}-S'$ と例外因子 D とが線型同値であるという第2の可能性は否定される。

(B) もともと可能性はひとつだけである。

3.3. $g=9$ の場合。

(A) 先に3.0で述べたように、V_{16} 上には直線が存在する。その直線 Z からの二重射影を考えると、$\pi_{2Z}: V_{16}\cdots\rightarrow\mathbb{P}^3$ であり、π_{2Z} が双有理写像になっているので、V_{16} は有理多様体である。一方、V_{14} は後に述べるように、3次元3次超曲面 B_3 と双有理であるが、B_3 は非有理多様体なので、V_{14} も非有理である。従って、V_{16} と V_{14} が双有理写像で結ばれることはなく、第2の可能性は否定される。

(B) 3.2 (A) と同様に第2の候補は矛盾を生じる。

3.4. $g=8$ の場合。

(A) 3次元3次超曲面 $B_3 \subset \mathbb{P}^4$ と、その上にある3正規有理4次曲線 Γ について、2.0 及び 2.2 の操作を考察すると、物事は全てうまく進み、2.6 に対応する2組の数値が得られる。このとき、数 e は恰度、有理4次曲線 Γ の B_3 内の弦(chord)の本数を表わしていることもわかる。一方、全く別の方法で、B_3 上の有理4次曲線の弦の本数が計算される。その値と e を比較して、双有理写像がひとつ決定できる。その逆写像として、第2の候補が具体的に実現される。

(B) 3.3 (A) で述べたように、V_{16} は有理で、V_{14} は非有理だから、第1の候補は矛盾を生ずる。

$g \leq 7$ の場合も同様にして決定していき、2.6、2.7 の表の (#) を得る。

注意 3.5. V_{14} と B_3 とが双有理同値であることは、既に Fano、Iskovskih [2] により知られていたが、3.4 (A) で作られた双有理写像は、彼らの与えたものとは異っている。

参考文献

[1] V. A. Iskovskih, Anticanonical models of three-dimensional algebraic varieties; English transl. in J. Soviet Math. 13 (1980), 745-814.

[2] ———, Birational automorphisms of three-dimensional algebraic varieties; English transl. in J. Soviet Math. 13 (1980), 815-868.

[3] M. Reid, Lines on Fano 3-folds according to Shokurov, preprint (1980).

[4] ———, Minimal models of canonical 3-folds, Advanced Studies in Pure Math. 1 (1983), Algebraic Varieties and Analytic Varieties, 131-180.

[5] K. Takeuchi, Some birational maps of non-trigonal Fano 3-folds, preprint (1987).